TP1 — Méthodes mathématiques

Définir et évaluer une fonction
Une variable:

$$\texttt{f := x-> sin(x);}$$

$$\texttt{f(1); f(Pi);}$$

Plusieurs variables:

$$\texttt{g := (x,y)-> sin(x*y);}$$

$$\texttt{g(1,Pi/2);}$$

Valeurs numériques:

$$\texttt{f(1.);} \qquad \text{ou} \qquad \texttt{evalf(f(1));}$$

$$\texttt{evalf(Pi,100);}$$

Nombres complexes:

$$\texttt{exp(I*Pi/3);}$$

Fonctions élémentaires pré-définies:

$$\texttt{sin, cos, tan, cot, sinh, cosh, tanh, coth, exp, ln, log[a], Re, Im, sqrt}$$

$$\texttt{arcsin, arccos, arctan, arccot, arcsinh, arccosh, arctanh, arccoth}$$

Manipulations avec les fonctions
Développer une fonction:

$$\texttt{expand((x+y)\^{}2); expand(cos(x+y));}$$

Dérivation:

$$\texttt{diff(sin(x),x); diff(sin(x),x\$2); diff(x*y\^{}2,x,y);}$$

Développement de Taylor:

$$\texttt{taylor(log(1+x),x=0,4);}$$

Intégration:

$$\texttt{int(log(x),x); int(sin(x),x=0..a);}$$

Résolution d'équations usuelles:

$$\texttt{solve(x\^{}2+b*x+c=0,x);}$$

Résolution d'équations différentielles:

$$\texttt{dsolve(diff(y(x),x\$2)+a\^{}2*y(x)=0,y(x));}$$

Equations différentielles munies de conditions initiales:

$$\texttt{dsolve(diff(y(x),x\$2)+y(x)=x,y(0)=b,D(y)(0)=c,y(x));}$$

Tracer des graphes
Fonction d'une variable:

$$\texttt{plot(sin(x),x=-2*Pi..2*Pi);}$$

Courbe paramétrée:

$$\texttt{plot([sin(t),cos(t),t=0..Pi]);}$$

Quelques fonctions sur le même graphe:

```
plot([x, x - x^3/6, x - x^3/6 + x^5/120, sin(x)], x = -Pi..Pi, color = [red, green, blue, black]);
```

Fonction de 2 variables:

```
plot3d(sin(x^2 + y^2), x = -3..3, y = -3..3, numpoints = 10000);
```

Courbe paramétrée en dimension 3:

```
with(plots) : spacecurve([sin(t), cos(t), t], t = 0..10 * Pi, numpoints = 100);
```

Représentation graphique d'un champ de vecteurs:

```
with(plots) : fieldplot([y, sin(x)], x = -5..5, y = -2..2);
```

A partir d'un ensemble de points:

```
with(plots) : listplot([[1, 1], [2, 1], [2, 2], [3, 2], [3, 3], [4, 3]]);
```

Pour plusieurs types de graphes sur le même dessin:

```
with(plots) :
F := plot(sin(x), x = 0..Pi, y = -Pi..Pi, style = line) :
G := listplot([seq([Pi * k/20, cos(Pi * k/20)], k = 0..20)], style = point) :
display(F, G, scaling = constrained, title = `Sinus et Cosinus`);
```

Programmation de base

Boucle `for`:

```
x := 0 : for j from 0 to 10 do x := x + a^j : od : print(x);
```

Opérateur `if`:

```
a := 3; b := 5; if (a > b) then a else b fi;
```

Définir une procédure:

```
somme:=proc(a,b); RETURN(a+b);end;
```

Opérations avec des matrices

Définir une matrice:

```
mat := array(1..2, 1..2, [[1, 2], [3, 4]]); mat[2, 1];
```

Valeurs propres:

```
with(linalg) : eigenvals(mat);
```

Vecteurs propres:

```
with(linalg) : eigenvects(mat);
```

Déterminant et matrice inverse:

```
with(linalg) : det(mat); inverse(mat);
```

Exercice 1. Résoudre les exercices du contrôle continu en utilisant Maple:

- Ex. 1 — trouver la solution de l'équation différentielle,
- Ex. 2 — calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A
- Ex. 5, 6 — calculer les intégrales

Exercice 2.

- Tracer la représentation graphique du champ vectoriel

$$\mathbf{E} = y\,\mathbf{e}_x + \sin x\,\mathbf{e}_y.$$

- Résoudre numériquement (fonction `odeplot`) le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin x \end{cases}$$

pour différentes conditions initiales. Tracer les solutions, comparer avec le graphe précédent et conclure.

Exercice 3. Considérons N particules identiques sur un cercle (conditions périodiques au bord) avec les positions $x_n(t)$ vérifiant les équations de Toda

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = e^{-(x_n - x_{n-1})} - e^{-(x_{n+1} - x_n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$

où $x_{N+1} = x_1$ et $x_0 = x_N$. Pour simplifier le problème, on pose $N = 5$. Définissons

$$a_n = \frac{1}{2} e^{-\frac{x_{n+1} - x_n}{2}}, \qquad b_n = \frac{1}{2}\frac{dx_n}{dt}, \qquad n = 1, \ldots, 5.$$

Montrer que si les x_n vérifient les équations de Toda, alors les a_n et b_n vérifient

$$\frac{da_n}{dt} = a_n(b_n - b_{n+1}), \qquad \frac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2). \tag{1}$$

Introduisons une paire de Lax — deux matrices L et B de taille 5×5:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & a_5 \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_4 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & a_4 & b_5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & a_5 \\ a_1 & 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & -a_4 \\ -a_5 & 0 & 0 & a_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifiez à l'aide de Maple que le système (1) est équivalent à l'équation matricielle

$$\frac{dL}{dt} = BL - LB.$$

2. Vérifiez que ce résultat se généralise à d'autre valeurs de N ($N = 6, 7, \ldots$).
3. Question théorique: montrer que les valeurs propres de $L(t)$ ne dépendent pas de t.

Remarque: Par conséquent, les valeurs propres de la matrice de Lax L donnent N intégrales de mouvement pour la chaine de Toda. C'est un résultat remarquable car en général on peut trouver un nombre limité de quantités conservées liées aux invariances du système (énergie, impulsion, moment angulaire, etc).